Algèbre bilinéaire

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Exercice 1 [00001] [correction]
Etablir que

$$q(P) = \int_0^1 P(t)P''(t)\,\mathrm{d}t$$

définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$ et exprimer sa forme polaire.

Exercice 2 [00002] [correction]
Soient $f_1, f_2 \in E^\star$ et $q(x) = f_1(x)f_2(x)$. Montrer que q définit une forme quadratique sur E et exprimer sa forme polaire.

Exercice 3 [00003] [correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
a) Soient f, g deux formes linéaires de E. Montrer que $q(x) = f(x)g(x)$ est une forme quadratique.
b) Soient q une forme quadratique et H un hyperplan. On suppose que pour tout $x \in H$, $q(x) = 0$. Montrer que q est le produit de deux formes linéaires.

Exercice 4 X MP [02940] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que $\{X \in \mathbb{C}^n / X^\star AX = X^\star BX = 0\} = \{0\}$.
Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^\star AP$ et $P^\star BP$ sont triangulaires supérieures.

Exercice 5 X MP [03078] [correction]
Soit q une forme quadratique non nulle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), q(AB) = q(A)q(B)$$

Montrer que q s'annule sur le complémentaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ puis que q est le déterminant.

Positivité

Exercice 6 [00004] [correction]
Soit q une forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique positive φ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $x \in E$, montrer

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0$$

Exercice 7 [00005] [correction]
Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2)$$

avec $p + q \leqslant n$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $q_{|F}$ soit définie positive. Montrer que $\dim F \leqslant p$.

Exercice 8 Centrale MP [00006] [correction]
Montrer que si q est une forme quadratique réelle est définie, celle-ci est positive ou négative.

Exercice 9 [00007] [correction]
Montrer qu'une forme quadratique positive est une fonction convexe.

Exercice 10 Mines-Ponts MP [02764] [correction]
Condition sur α pour que la forme quadratique Q_α définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, Q_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

soit définie positive ?

Exercice 11 Mines-Ponts MP [02763] [correction]
On pose, pour $X \in \mathbb{R}^n$,

$$q(X) = \det\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & A \end{pmatrix}$$

où A est une matrice symétrique réelle définie positive d'ordre n. Montrer que q est une forme quadratique définie négative (indice : commencer par le cas où A est diagonale).

Exercice 12 [01340] [correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on pose

$$\Phi(X, Y) = -\det \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.
b) A quelle condition sur A, l'application Φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 13 Mines-Ponts MP [02765] [correction]
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E de forme polaire B,

$$C_q = \{x \in E, q(x) = 0\} \text{ et } N_q = \{x \in E, \forall y \in E, B(x, y) = 0\}$$

Montrer que $C_q = N_q$ si, et seulement si, q est positive ou négative.

Exercice 14 Centrale MP [03062] [correction]
Soient $a_1, \dots a_n > 0$ et deux à deux distincts.
Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $q(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{a_i + a_j}$.
Montrer que q est une forme quadratique définie positive.

Endomorphismes autoadjoints positifs

Exercice 15 [00008] [correction]
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $u = f^\star \circ f$. Montrer que $u \in \mathcal{S}^+(E)$.

Exercice 16 [00009] [correction]
Soit u un endomorphisme symétrique positif d'un espace vectoriel euclidien E.
a) Montrer qu'il existe un endomorphisme v symétrique positif tel que $u = v^2$.
b) Etablir l'unicité de v en étudiant l'endomorphisme induit par v sur les sous-espaces propres de u.

Exercice 17 Centrale MP [02399] [correction]
Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ un espace euclidien et A un endomorphisme symétrique défini positif de $(E, \langle\,|\,\rangle)$. On pose

$$\langle x \mid y \rangle_A = \langle A^{-1}x \mid y \rangle$$

pour tous $x, y \in E$.
a) Montrer que $\langle\,|\,\rangle_A$ est un produit scalaire.
Soit B un endomorphisme autoadjoint de $(E, \langle\,|\,\rangle)$.
b) Montrer que AB est diagonalisable
Si M est un endomorphisme diagonalisable de E, on note $\lambda_{\min}(M)$ (resp. $\lambda_{\max}(M)$) sa plus petite (resp. grande) valeur propre.
c) Montrer que l'image de $E \setminus \{0\}$ par

$$x \mapsto \frac{\langle Bx \mid x \rangle}{\langle A^{-1}x \mid x \rangle}$$

n'est autre que le segment d'extrémités $\lambda_{\min}(AB)$ et $\lambda_{\max}(AB)$.
d) Montrer que

$$\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \leqslant \lambda_{\min}(AB) \leqslant \lambda_{\max}(AB) \leqslant \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$$

Exercice 18 Centrale MP [02400] [correction]
Soit u un automorphisme d'un espace euclidien E.
a) Montrer que $v = u^\star u$ est autoadjoint défini positif.
b) Montrer qu'il existe w autoadjoint positif tel que $v = w^2$, et ρ orthogonal tel que $u = \rho w$.
c) Montrer que cette décomposition de u est unique.
d) Comment interpréter ces résultats de façon matricielle ?

Exercice 19 Mines-Ponts MP [02753] [correction]
Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique défini positif. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^4 \leqslant \langle u(x), x \rangle \left\langle u^{-1}(x), x \right\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 20 [00629] [correction]
Soit E un espace euclidien. Montrer l'équivalence des assertions suivantes
(i) $uu^\star u = u$,
(ii) $uu^\star$ est un projecteur orthogonal,
(iii) $u^\star u$ est un projecteur orthogonal,
(iv) $(\ker u)^\perp = \{x \in E / \|u(x)\| = \|x\|\}$.

Exercice 21 [03329] [correction]
Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimension n non nulle.
On pose
$$H_u = \{x \in E/(u(x) \mid x) = 1\}$$
a) Enoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de u pour qu'il existe un vecteur unitaire élément de H_u.
b) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de $v^{-1} \circ u$ pour que $H_u \cap H_v \neq \emptyset$.

Exercice 22 [03330] [correction]
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint défini positif.
a) Montrer qu'il existe un endomorphisme s autoadjoint défini positif vérifiant $s^2 = v$.
b) En déduire que $v^{-1} \circ u$ est diagonalisable.

Matrices symétriques positives

Exercice 23 [00010] [correction]
Soient a, b, c trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} a.a & a.b & a.c \\ b.a & b.b & b.c \\ c.a & c.b & c.c \end{pmatrix}$.
Montrer que M diagonalisable, de valeurs propres positives et $\det M \geqslant 0$.

Exercice 24 [00011] [correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Exercice 25 [00013] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
a) Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,i} \geqslant 0$.
b) Observer que si $a_{i,i} = 0$ alors, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j} = 0$.

Exercice 26 [03091] [correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On veut montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que
$$B^2 = A$$
a) Prouver l'existence.
On considère maintenant $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$
b) Etablir par le lemme de décomposition des noyaux que pour tout $\lambda > 0$
$$\ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) = \ker(A - \lambda I_n)$$
c) Montrer aussi
$$\ker B = \ker A$$
d) Conclure l'unicité.

Exercice 27 [00015] [correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On veut montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que
$$B^2 = A$$
a) Prouver l'existence.
b) Etablir que si $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 = A$ alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}A$,
$$\ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) \subset \ker(A - \lambda I_n)$$
puis
$$\ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) = \ker(A - \lambda I_n)$$
c) Conclure l'unicité.

Exercice 28 [03090] [correction]
Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui est un polynôme en S vérifiant $A^2 = S$
b) Soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = S$. Montrer que B commute avec A puis que $B = A$.

Exercice 29 [00016] [correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 30 [00018] [correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = {}^tMM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Inversement pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ établir qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tMM$.

Exercice 31 [00020] [correction]
[Décomposition de Cholesky]
Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tTT$.

Exercice 32 Mines-Ponts MP [02759] [correction]
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}A$.
a) Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
b) Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xB) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
c) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
d) Etudier la réciproque.
e) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = SU$.

Exercice 33 [03150] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer

$$\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$$

Exercice 34 [03168] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer

$$\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$$

Exercice 35 [03169] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive dont tous les coefficients sont non nuls.
On pose

$$B = (1/a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Montrer

$$B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = 1$$

Exercice 36 [03175] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note m le plus coefficient de la diagonale de m.
Etablir

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, |a_{i,j}| \leqslant m$$

Matrices symétriques définies positives

Exercice 37 [03158] [correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.

Exercice 38 [00022] [correction]
[Matrice de Hilbert]
Soit

$$H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Montrer que H est diagonalisable à valeurs propres strictement positives.

Exercice 39 [00012] [correction]
Etablir que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 40 [00014] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\varphi(X,Y) =^t XAY$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
b) En appliquant Cauchy-Schwarz, en déduire que pour tout $i \neq j$: $a_{i,j}^2 < a_{i,i}a_{j,j}$.

Exercice 41 [00021] [correction]
[Mineurs de Gauss]
Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $A_p = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$
a) On suppose que A est définie positive.
Justifier que $\det A > 0$.
b) On suppose encore A est définie positive.
Etablir que pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, $\det A_p > 0$.
c) Justifier la réciproque en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 42 [03151] [correction]
Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
Montrer que la matrice $I_n + AB$ est inversible.

Exercice 43 [00017] [correction]
[Décomposition de Cartan]
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
a) Etablir que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Montrer qu'il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$S^2 = {}^tAA$$

c) Conclure

$$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists (O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A = OS$$

d) Etablir l'unicité de l'écriture.

Exercice 44 Mines-Ponts MP [02761] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique positive si, et seulement si, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$.
Montrer que A est symétrique définie positive si, et seulement si, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$.

Exercice 45 Mines-Ponts MP [02754] [correction]
a) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit $A_1, \ldots, A_k$ des éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des réels. On pose $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$ et $B = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| A_i$.
b) Montrer que, pour $X \in \mathbb{R}^n$, $|{}^tXAX| \leqslant {}^tXBX$.
c) Montrer que $|\det A| \leqslant \det B$.

Exercice 46 Mines-Ponts MP [02755] [correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
a) Montrer l'existence de $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $C^2 = A^{-1}$.
b) On pose $D = CBC$. Montrer que $(\det(I + D))^{1/n} \geqslant 1 + (\det D)^{1/n}$.
c) Montrer que $(\det(A + B))^{1/n} \geqslant (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}$.

Exercice 47 [03170] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer

$$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

Exercice 48 [03174] [correction]
Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la comatrice de S est symétrique.
Même question avec $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ puis $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Diagonalisation de forme bilinéaire symétrique

Exercice 49 [00024] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
a) Justifier que ${}^tAA$ est la matrice dans la base canonique d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
b) En orthonormalisant la base canonique pour ce produit scalaire, établir qu'il existe une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs P vérifiant

$${}^tP^tAAP = I_n$$

c) Etablir qu'il existe Q orthogonale et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs vérifiant $A = QR$.
d) Etudier l'unicité de cette écriture.

Exercice 50 [00019] [correction]
[Décomposition de Cholesky]
Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux positifs vérifiant $S = {}^tTT$.

Exercice 51 Mines-Ponts MP [02760] [correction]
Montrer que le déterminant d'une matrice symétrique réelle définie positive est majoré par le produit de ses éléments diagonaux.

Exercice 52 [03087] [correction]
[Inégalité de Hadamard]
Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe $T \in T_n^{+}(\mathbb{R})$ vérifiant $S = {}^tTT$.

b) En déduire que

$$\det S \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$$

c) Etablir que pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$|\det A| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)^{1/2}$$

Diagonalisation simultanée de formes bilinéaires symétriques

Exercice 53 [00025] [correction]
Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Etablir qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in D_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tPDP$$

Exercice 54 Centrale MP [02405] [correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer que le polynôme $\det(A - XB)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 55 Centrale MP [02398] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux > 0 telles que

$$A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tP\Delta P$$

b) Montrer que

$$\det(A + B) \geqslant \det A + \det B$$

c) Montrer que l'inégalité de b) subsiste si $A, B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Exercice 56 Centrale MP [02407] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \leqslant {}^tXBX$.
Montrer que $\det A \leqslant \det B$.

Exercice 57 Centrale MP [02402] [correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que AB est diagonalisable.

Exercice 58 Mines-Ponts MP [02756] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que si A est définie positive alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.
b) Montrer que $(\det A)^t(\det B)^{1-t} \leqslant \det(tA + (1-t)B)$ pour tout $t \in]0, 1[$.

Exercice 59 Centrale MP [02406] [correction]
Soit $\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A + {}^tA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\}$.
a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{P}$ si, et seulement si, :
$\forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, {}^tXAX > 0$.
b) Soient $A \in \mathcal{P}$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer, si λ est valeur propre complexe de SA, que $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

Rang d'une forme quadratique

Exercice 60 [00026] [correction]
Soient $f_1, f_2 \in E^\star$ indépendantes et q la forme quadratique définie par
$q(x) = f_1(x)f_2(x)$.
Déterminer le rang de la forme quadratique q.

Exercice 61 [00027] [correction]
Soit φ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, c'est à dire de rang$n$, sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension$n$.
Pour F sous-espace vectoriel de$E$, on note

$$F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F, \varphi(x, y) = 0\}$$

a) Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension$n - \dim F$.
b) Justifier$F^{\perp\perp} = F$.
c) Montrer que $F \oplus F^\perp = E$ si, et seulement si, la restriction de φ à F est non dégénérée.

Exercice 62 Mines-Ponts MP [02762] [correction]
Soit sur $\mathbb{R}^n$ la forme quadratique $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n, i \neq j} x_i x_j$. Trouver son rang.

Signature d'une forme quadratique

Exercice 63 [02630] [correction]
Déterminer la signature de $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

Exercice 64 [02632] [correction]
$A = (\min(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et q la forme quadratique canoniquement associée à A.
Former une décomposition de Gauss de q et déterminer la signature de A.

Exercice 65 [02633] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Montrer que A est définie positive si, et seulement si,

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \Delta_k = \det((a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}) > 0$$

Exercice 66 [02634] [correction]
Montrer que $\varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique.
En étudiant sa restriction à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, en déterminer la signature.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

$$\varphi(P,Q)=\frac{1}{4}\left(q(P+Q)-q(P-Q)\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 P(t)Q''(t)+P''(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

est une forme bilinéaire symétrique et donc q est une forme quadratique dont φ est la forme polaire.

Exercice 2 : [énoncé]
$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}\left(q(x+y)-q(x-y)\right)=\frac{1}{2}\left(f_1(x)f_2(y)+f_1(y)f_2(x)\right)$ est une forme bilinéaire symétrique et donc q est une forme quadratique dont φ est la forme polaire.

Exercice 3 : [énoncé]
a) q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}(f(x)g(y)+f(y)g(x))$.
b) Soit a un vecteur n'appartenant pas à H. Pour tout $x\in E$, on écrit de manière unique $x=h+\lambda a$ et on observe aisément que $x\mapsto h$ et $x\mapsto\lambda$ sont des applications linéaires. En introduisant φ la forme polaire de q, on a
$q(x)=q(h)+2\lambda\varphi(a,h)+\lambda^2q(a)=\lambda(2\varphi(a,h)+\lambda q(a))=f(x)g(x)$ avec $f(x)=\lambda$ et $g(x)=2\varphi(a,h)+\lambda q(a)$ formes linéaires.

Exercice 4 : [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^\star$.
Pour $n=1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n-1\geqslant 1$.
Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\{X\in\mathbb{C}^n/X^\star AX=X^\star BX=0\}=\{0\}$.
Considérons $P(\lambda)=\det(A+\lambda B)$.
Cas $\det A,\det B\neq 0$.
P est un polynôme complexe non constant donc il existe λ, nécessairement non nul tel que $P(\lambda)=0$.
Par suite, il existe $X\in\mathbb{C}^n$, $X\neq 0$ tel que $AX+\lambda BX=0$.
Soit $F=\{Y\in\mathbb{C}^n/Y^\star AX=0\}$.
Puisque $\lambda\neq 0$, $F=\{Y\in\mathbb{C}^n/Y^\star BX=0\}$.
Si $X\in F$ alors $X^\star AX=0$ et donc $X^\star BX=0$ ce qui entraîne $X=0$ ce qui est exclu.
De même $AX\neq 0$ car comme ci-dessus $AX=0$ entraîne $X=0$.
On en déduit que F est un hyperplan et $\mathbb{C}^n=\mathrm{Vect}(X)\oplus F$.
Soient φ et ψ les formes sesquilinéaires représentées par A et B.
On peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux restrictions à F des formes sesquilinéaires φ et ψ. En formant une base de $\mathbb{C}^n$ en accolant X et une base de F trigonalisant les restrictions de ψ et ψ, on obtient une base de $\mathbb{C}^n$ trigonalisant φ et ψ puisque $\forall Y\in F,\varphi(Y,X)=Y^\star AX=0$ et $\psi(Y,X)=Y^\star BX=0$.
Par formule de changement de base, ce qui précède signifie qu'il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $P^\star AP$ et $P^\star BP$ sont triangulaires supérieures.

Exercice 5 : [énoncé]
Commençons par quelques résultats préliminaires...
Calculons $q(I_2)$.
Puisque $I_2=I_2^2$, on a $q(I_2)=q(I_2^2)=q(I_2)q(I_2)$ donc $q(I_2)=0$ ou 1.
Si $q(I_2)=0$ alors pour tout $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $q(A)=q(A\times I_2)=q(A)q(I_2)=0$ et donc $q=\tilde{0}$ ce qui est exclu.
On en déduit $q(I_2)=1$.
Etudions maintenant les valeurs de q sur des matrices semblables.
Soient $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ semblables.
Il existe $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $B=P^{-1}AP$ et alors $q(B)=q(P^{-1})q(A)q(P)=q(A)$ car $q(P^{-1})q(P)=q(I_2)=1$.
Ainsi q prend les mêmes valeurs sur des matrices semblables.
Calculons $q\left(A\right)$ pour

$$A=E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Puisque $E_{1,2}^2=O_2$, on a $q(E_{1,2})^2=q(E_{1,2}^2)=q(O_2)=0$ et donc $q(E_{1,2})=0$.
Calculons $q\left(A\right)$ pour

$$A=E_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Puisque $E_{1,1}^2=E_{1,1}$, on a $q(E_{1,1})^2=q(E_{1,1}^2)=q(E_{1,1})$ et donc $q(E_{1,1})=0$ ou 1.
Par l'absurde, supposons $q(E_{1,1})=1$
Puisque A est semblable à $E_{2,2}$, $q(E_{1,1})=q(E_{2,2})$.
Par l'identité du parallélogramme
$q(E_{1,1}+E_{2,2})+q(E_{1,1}-E_{2,2})=2(q(E_{1,1})+q(E_{2,2}))=4$.
Or $q(E_{1,1}+E_{2,2})=q(I_2)=1$ et $q(E_{1,1}-E_{2,2})=1$ ou -1 car $(E_{1,1}-E_{2,2})^2=I_2$.
C'est absurde.
On en déduit $q(A)=0$ et au passage on observe $q\left(E_{1,1}-E_{2,2}\right)=-1$.
Considérons maintenant $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non inversible.
La matrice est semblable à

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\text{ ou }\begin{pmatrix}0&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$$

Dans les deux cas $q(A)=0$.

Considérons maintenant $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ et montrons $q(A)=\lambda\mu$.

$$A=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

donc

$$q(A)=\lambda^2 q(E_{1,1})+2\lambda\mu\varphi(E_{1,1},E_{2,2})+\mu^2 q(E_{2,2})$$

Or $q(E_{1,1})=q(E_{2,2})=0$ et

$$\varphi(E_{1,1},E_{2,2})=\frac{1}{4}\left(q(E_{1,1}+E_{2,2})-q(E_{1,1}-E_{2,2})\right)=\frac{1}{2}$$

donc $q(A)=\lambda\mu=\det A$.

L'identité qui précède est encore vraie si A est diagonalisable et puisque l'application q et l'application det sont continues et coïncident sur l'ensemble des matrices diagonalisables qui est une partie dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on peut conclure que l'application q est le déterminant sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 6 : [énoncé]

$(\Leftarrow)$: il suffit de prendre $y=x$.

$(\Rightarrow)$: Par Cauchy Schwarz, on sait $|\varphi(x,y)|\leqslant q(x)q(y)$.

Exercice 7 : [énoncé]

Soit $x\in F\cap\text{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$. On a $q(x)\geqslant 0$ et $q(x)\leqslant 0$ donc $q(x)=0$ puis $x=0$.

Par suite F et $\text{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$ sont en somme directe et donc nécessairement $\dim F\leqslant p$.

Exercice 8 : [énoncé]

Soient $a,b\in E$. L'application

$$t\mapsto q((1-t)a+tb))=(1-t)^2q(a)+2t(1-t)\varphi(a,b)+t^2q(b)$$

est continue et prend la valeur $q(a)$ en $t=0$ et $q(b)$ en $t=1$.

Si $q(a)q(b)<0$ alors cette application s'annule et donc puisque l'on suppose q définie, il existe $t\in\left]0,1\right[$ tel que $(1-t)a+tb=0$. Mais alors $(1-t)a=-tb$ donne $(1-t)^2q(a)=t^2q(b)$ et donc $q(a)q(b)\geqslant 0$.

Il y a contradiction et donc pour tout $a,b\in E$, $q(a)q(b)\geqslant 0$ c'est-à-dire $q(a)$ et $q(b)$ sont de même signe.

On peut alors conclure que q est définie positive ou définie négative.

Exercice 9 : [énoncé]

$q((1-\lambda)a+\lambda b)=(1-\lambda)^2q(a)+2(1-\lambda)\lambda\varphi(a,b)+\lambda^2q(b)$.

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\varphi(a,b)\leqslant\sqrt{q(a)q(b)}\leqslant\frac{1}{2}\left(q(a)+q(b)\right)$ donc

$q((1-\lambda)a+\lambda b)\leqslant(1-\lambda)^2q(a)+(1-\lambda)\lambda\left(q(a)+q(b)\right)+\lambda^2q(b)$ puis

$q((1-\lambda)a+\lambda b)\leqslant(1-\lambda)q(a)+\lambda q(b)$.

Exercice 10 : [énoncé]

La matrice de Q_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$\begin{pmatrix}1-\alpha & & (\alpha)\\ & \ddots & \\ (\alpha) & & 1-\alpha\end{pmatrix}$$

Si $n=1$, seul $1-\alpha$ est valeur propre et une condition nécessaire et suffisante est que $\alpha<1$.

Si $n\geqslant 2$ alors les valeurs propres sont $1-n\alpha$ et $1-2\alpha$. Une condition nécessaire et suffisante pour que Q_α soit définie positive est $1-n\alpha>0$ et $1-2\alpha>0$ i.e. $\alpha<1/n$.

Exercice 11 : [énoncé]

Cas $A=\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ avec $\lambda_i>0$.

En développant le déterminant selon la première colonne :

$$q(x_1,\dots,x_n)=-\lambda_1\dots\lambda_n\left(\frac{x_1^2}{\lambda_1}+\dots+\frac{x_n^2}{\lambda_n}\right)$$

q est évidemment une forme quadratique définie négative.

Cas général : on peut écrire $A={}^tPDP$ avec $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D=\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_i>0$.

On observe

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & {}^tX\\ X & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & {}^tP\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & {}^t(PX)\\ PX & D\end{pmatrix}$$

et donc

$$q(X)=\det\begin{pmatrix}0 & {}^tPX\\ PX & D\end{pmatrix}$$

car $\det P=1$. Cela permet de conclure.

Exercice 12 : [énoncé]
a) L'application Φ est bien définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.
Par linéarité du déterminant en la première colonne, on obtient

$$\Phi(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \Phi(X, Y_1) + \lambda_2 \Phi(X, Y_2)$$

De plus, le déterminant d'une matrice étant celui de sa transposée

$$\Phi(X,Y) = -\det\begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ X & {}^tA \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ X & A \end{pmatrix} = \Phi(Y,X)$$

Ainsi Φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.
b) En vertu du théorème spectral, la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale

$$A = {}^tPDP \text{ avec } P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$$

On observe alors

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tP \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ Y & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \text{ avec } Y = PX$$

On a ainsi $\Phi(X,X) = \Psi(Y,Y)$ avec

$$\Psi(Y,Y) = -\det\begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ Y & D \end{pmatrix} = \beta\gamma y_1^2 + \alpha\gamma y_2^2 + \alpha\beta y_3^2$$

On en déduit que la forme bilinéaire symétrique Φ est définie positive si, et seulement si,

$$\alpha\beta, \beta\gamma, \alpha\gamma > 0$$

ce qui signifie que les réels α, β, γ sont de même signe strict.

Exercice 13 : [énoncé]
Notons que l'inclusion $N_q \subset C_q$ est toujours vraie (il suffit de prendre $y = x$).
Cas q positive :
Soit $x \in C_q$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $y \in E$,

$$|B(x,y)| \leqslant q(x)q(y) = 0$$

donc $B(x,y) = 0$. Ainsi $x \in N_q$ et donc $C_q \subset N_q$ puis l'égalité.
Cas q négative :
Il suffit d'étudier $-q$.
Inversement, montrons que si q n'est ni négative, ni positive alors $C_q \neq N_q$.
Supposons qu'il existe $x, y \in E$ tel que $q(x) > 0$ et $q(y) < 0$.
Par continuité de la fonction $t \mapsto q(tx + (1-t)y)$, on peut affirmer qu'il existe $t \in \left]0,1\right[$ tel que

$$z = tx + (1-t)y \in C_q$$

Si par l'absurde $z \in N_q$ alors

$$B(z,x) = B(z,y) = 0$$

Or par développement

$$B(z,x) = tq(x) + (1-t)B(x,y) \text{ et } B(z,y) = tB(x,y) + (1-t)q(y)$$

Ceci entraîne une incompatibilité de signe sur $B(x,y)$.
On peut donc affirmer que $z \notin N_q$ et donc $C_q \neq N_q$.

Exercice 14 : [énoncé]
Notons E l'espace des fonctions continues de $\left]0,1\right]$ dans $\mathbb{R}$ et de carrés intégrables.
On définit un produit scalaire ϕ sur E par

$$\phi(f,g) = \int_{]0,1]} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, posons $f_i : t \mapsto t^{a_i - 1/2}$ élément de E.
Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ éléments de $\mathbb{R}^n$, posons

$$b(x,y) = \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i f_i, \sum_{i=1}^n y_i f_i\right)$$

L'application b est évidemment une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ et pour celle-ci

$$b(x,x) = \int_{]0,1]} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j t^{a_i + a_j - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{a_i + a_j} = q(x)$$

Ainsi q est une forme quadratique.
De plus, puisque la forme bilinéaire symétrique ϕ est positive, il en de même de b et donc la forme quadratique q est positive.
Enfin, si $q(x) = 0$ alors $\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$.
Ainsi $\sum_{i=1}^n x_i t^{a_i - 1/2} = 0$ pour tout $t \in \left]0,1\right]$.

En multipliant par $t^{1/2}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} x_i t^{a_i} = 0 \text{ pour tout } t \in]0,1] \quad (*)$$

En posant $t = 1$, on obtient l'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.
En dérivant (*) et en multipliant par t, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i t^{a_i} = 0 \text{ pour tout } t \in]0,1] \quad (**)$$

En posant $t = 1$, on obtient l'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.
En reprenant ce principe, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k x_i = 0 \text{ pour tout } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ est alors solution d'un système linéaire homogène à n équations qui est un système de Cramer car son déterminant est un déterminant de Vandermonde non nul puisque les $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts. Par suite $x_1 = \dots = x_n = 0$ et ainsi $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
Finalement q est une forme quadratique définie positive.

Exercice 15 : [énoncé]
$u^\star = (f^\star \circ f)^\star = f^\star \circ f = u$ donc $u \in \mathcal{S}(E)$
Si λ est valeur propre de u associée au vecteur propre $x \neq 0$ alors $(x \mid u(x)) = \lambda \|x\|^2$ et $(x \mid u(x)) = \|f(x)\|^2$ donc $\lambda = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \geqslant 0$.

Exercice 16 : [énoncé]
a) u est diagonalisable et ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont positives. E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$, notons $p_1, \dots, p_r$ les projecteurs orthogonaux associés à cette décomposition.
On a $u = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r$ et en posant $v = \sqrt{\lambda_1} p_1 + \dots + \sqrt{\lambda_r} p_r$, on a $v^2 = u$ avec v endomorphisme symétrique positif. On peut aussi proposer une résolution matricielle via représentation dans une base orthonormée
b) Soit v solution. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $F = E_\lambda(u)$ est stable par v car u et v commutent. $v_F \in \mathcal{S}^+(F)$ et $v_F^2 = \lambda \mathrm{Id}_F$ donc via diagonalisation de v_F, on obtient $v_F = \sqrt{\lambda} \mathrm{Id}_F$. Ceci détermine v de manière unique sur chaque sous-espace propre de u et puisque ceci sont en somme directe égale à E, on peut conclure à l'unicité de v.

Exercice 17 : [énoncé]
a) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(E)$ donc $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(E)$ et par suite $\langle \mid \rangle_A$ est un produit scalaire sur E.
b) On a

$$\langle x \mid ABy \rangle_A = \langle A^{-1}x \mid ABy \rangle = \langle x \mid By \rangle = \langle Bx \mid y \rangle = \langle ABx \mid y \rangle_A$$

L'endomorphisme AB est autoadjoint dans $(E, \langle \mid \rangle_A)$ donc diagonalisable.
c) On a

$$\frac{\langle Bx \mid x \rangle}{\langle A^{-1}x \mid x \rangle} = \frac{\langle ABx \mid x \rangle_A}{\|x\|_A^2}$$

En introduisant une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $(E, \langle \mid \rangle_A)$ formée de vecteurs propres de AB, on peut écrire pour $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$$\frac{\langle ABx \mid x \rangle_A}{\|x\|_A^2} = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de AB. Il est clair que cette quantité est comprise entre $\lambda_{\min}(AB)$ et $\lambda_{\max}(AB)$. De plus ces deux valeurs propres sont valeurs prise par

$$\frac{\langle ABx \mid x \rangle_A}{\|x\|_A^2}$$

en x vecteur propre associé. Enfin $E \setminus \{0\}$ est connexe par arcs et l'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs. On peut donc conclure que les valeurs prises par

$$x \mapsto \frac{\langle Bx \mid x \rangle}{\langle A^{-1}x \mid x \rangle}$$

sur $E \setminus \{0\}$ constituent le segment

$$[\lambda_{\min}(AB), \lambda_{\max}(AB)]$$

d) On a $\langle Bx \mid x \rangle \leqslant \lambda_{\max}(B) \|x\|^2$ et $\langle A^{-1}x \mid x \rangle \geqslant \lambda_{\min}(A^{-1}) \|x\|^2$ donc

$$\frac{\langle Bx \mid x \rangle}{\langle A^{-1}x \mid x \rangle} \leqslant \frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(A^{-1})}$$

Or $\lambda_{\min}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\max}(A)}$ donc

$$\frac{\langle Bx \mid x \rangle}{\langle A^{-1}x \mid x \rangle} \leqslant \lambda_{\min}(A) \lambda_{\max}(B)$$

et la conclusion est dès lors facile.

Exercice 18 : [énoncé]
a) $v^\star = v$ et$(v(x) \mid x) = \|u(x)\|^2 \geqslant 0$ et $= 0 \Leftrightarrow x = 0$ car $u \in \mathrm{GL}(E)$.
b) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de v est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$. L'endomorphisme w dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ convient. Notons que cet endomorphisme est autoadjoint car représenté par une matrice symétrique dans une base orthonormée.
On pose ensuite $\rho = uw^{-1}$ et on vérifie sans peine $\rho^\star\rho = \mathrm{Id}$ donc $\rho \in \mathcal{O}(E)$.
c) Si $u = \rho w$ alors $w^2 = v$. Nous allons établir l'unicité de w. v est diagonalisable donc E est somme des sous-espaces propres $E_\lambda(v)$ avec $\lambda \geqslant 0$. Comme v et w commutent, ces sous-espaces sont stables par w. Or w est diagonalisable donc l'endomorphisme induit par w sur $E_\lambda(v)$ aussi et puisque les valeurs propres de w sont positives, il est nécessaire que l'endomorphisme induit par w sur $E_\lambda(v)$ soit $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}$. Ceci détermine w de manière unique et puisque $\rho = uw^{-1}$, r aussi est unique.
d) $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists!(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A = OS$ (décomposition de Cartan).

Exercice 19 : [énoncé]
Pour $x = 0$, il y a égalité.
Pour $x \neq 0$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\left\langle u\left(x + \lambda u^{-1}(x)\right) \mid x + \lambda u^{-1}(x)\right\rangle \geqslant 0$ donc
$\lambda^2 \left\langle x, u^{-1}(x)\right\rangle + 2\lambda \langle x \mid x\rangle + \langle u(x), x\rangle \geqslant 0$ avec $\left\langle x, u^{-1}(x)\right\rangle \neq 0$ car $u^{-1} \in \mathcal{S}^{++}(E)$.
Par suite $\Delta = 4\|x\|^4 - 4\langle u(x), x\rangle \left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle \leqslant 0$ puis l'inégalité proposée.
De plus, il y a égalité si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $x + \lambda u^{-1}(x) = 0$ i.e. si, et seulement si, x est vecteur propre de u.

Exercice 20 : [énoncé]
Rappelons les propriétés classiques suivantes utiles pour la suite :
$(\ker u)^\perp = \mathrm{Im}u^\star$, $\mathrm{rg}(u^\star u) = \mathrm{rg}u^\star = \mathrm{rg}u$, et $u^\star u \in \mathcal{S}^+(E)$.
(i)⇒(ii) Supposons $uu^\star u = u$. On a alors $uu^\star(uu^\star) = (uu^\star u)u^\star = uu^\star$ donc $uu^\star$ est un projecteur.
De plus $(uu^\star)^\star = u^{\star\star}u^\star = uu^\star$ donc le projecteur $uu^\star$ est orthogonal.
(ii)⇒(iii) Supposons $uu^\star$ projecteur orthogonal. On a $uu^\star uu^\star = uu^\star$ donc $u(u^\star uu^\star u) = u(u^\star u)$ puis $u \circ (u^\star uu^\star u - u^\star u) = \tilde{0}$. Par suite, l'endomorphisme $u^\star uu^\star u - u^\star u$ prend ses valeurs dans $\ker u$. Or il prend aussi ses valeurs dans $\mathrm{Im}u^\star = (\ker u)^\perp$, c'est donc l'endomorphisme nul.
(iii)⇒(iv) Supposons $u^\star u$ projecteur orthogonal.
Puisque $\mathrm{Im}u^\star u \subset \mathrm{Im}u^\star$ et puisque $\mathrm{rg}(u^\star u) = \mathrm{rg}u^\star$, on a $\mathrm{Im}(u^\star u) = \mathrm{Im}u^\star = (\ker u)^\perp$.
Ainsi $u^\star u$ est la projection orthogonale sur $(\ker u)^\perp$.
Soit $x \in (\ker u)^\perp$.
$\|u(x)\|^2 = (u(x) \mid u(x)) = (u^\star u(x) \mid x) = (x \mid x) = \|x\|^2$.
Inversement, supposons $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$
Par les calculs qui précédent, on obtient $(x - u^\star u(x) \mid x) = 0$.
On peut écrire $x = a + b$ avec $a = u^\star u(x) \in (\ker u)^\perp$ et $b \in \ker u$.
$(x - u^\star u(x) \mid x) = 0$ donne $(b \mid a + b) = 0$ puis $(b \mid b) = 0$ et donc $b = 0$.
Ainsi $x = a + b = a \in (\ker u)^\perp$.
(iv)⇒(i) Supposons $(\ker u)^\perp = \{x \in E / \|u(x)\| = \|x\|\}$.
Puisque $\ker u$ est stable par $u^\star u$, $(\ker u)^\perp$ est stable par $(u^\star u)^\star = u^\star u$.
L'endomorphisme induit par $u^\star u$ sur $(\ker u)^\perp$ est un endomorphisme autoadjoint positif conservant la norme, c'est donc l'identité car sa seule valeur propre possible est 1.
Puisque l'endomorphisme $u^\star u$ est nul sur $\ker u$ et égal à l'identité sur $(\ker u)^\perp$, on peut affirmer que les endomorphismes $uu^\star u = u(u^\star u)$ et u sont égaux car ils coïncident sur les deux espaces supplémentaires $\ker u$ et $(\ker u)^\perp$.

Exercice 21 : [énoncé]
a) Si $\lambda_{\min} = \min \mathrm{Sp}u$ et $\lambda_{\max} = \max \mathrm{Sp}u$, on montre en introduisant une base orthonormée diagonalisant u que

$$\forall x \in E, \lambda_{\min} \|x\|^2 \leqslant (u(x) \mid x) \leqslant \lambda_{\max} \|x\|^2$$

Pour qu'il existe un vecteur unitaire appartenant à H_u il est nécessaire que $1 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.
Inversement, supposons $1 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.
Si $\lambda_{\min} = \lambda_{\max}$ alors la réciproque est immédiate.
Supposons désormais $\lambda_{\min} < \lambda_{\max}$. On introduit $e_{\min}$ vecteur propre unitaire associé à $\lambda_{\min}$ et $e_{\max}$ vecteur propre unitaire associé à $\lambda_{\max}$. Considérons enfin

$$e_\theta = \cos(\theta)e_{\min} + \sin(\theta)e_{\max}$$

Puisque $e_{\min}$ et $e_{\max}$ sont unitaires et orthogonaux, on vérifie $\|e_\theta\| = 1$.
Considérons ensuite $f(\theta) = (u(e_\theta) \mid e_\theta)$. La fonction f est continue, $f(0) = \lambda_{\min}$ et $f(\pi/2) = \lambda_{\max}$ dont, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in [0, \pi/2]$ vérifiant $e_\theta \in H_u$.
b) Considérons le produit scalaire défini par

$$\langle x, y\rangle = (v(x) \mid y)$$

On observe

$$(v(x) \mid x) = \langle x, x\rangle \text{ et } (u(x) \mid x) = \left\langle v^{-1} \circ u(x), x\right\rangle$$

L'endomorphisme $v^{-1}\circ u$ est autoadjoint pour le produit scalaire $\langle .,.\rangle$ et l'étude du a) adaptée au contexte en cours, assure qu'il existe $x\in E$ vérifiant

$$\langle x,x\rangle = 1 \text{ et } \left\langle v^{-1}\circ u(x) \mid x\right\rangle = 1$$

si, et seulement si, 1 est compris entre

$$1\in\left[\min \operatorname{Sp}(v^{-1}\circ u), \max \operatorname{Sp}(v^{-1}\circ u)\right]$$

Exercice 22 : [énoncé]

a) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormé diagonalisant v :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_k > 0$$

L'endomorphisme s déterminé par

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

vérifie $s^2 = v$ et puisque sa matrice dans une base orthonormée est symétrique, c'est endomorphisme est autoadjoint. Enfin $\operatorname{Sp} s \subset \mathbb{R}^{+\star}$ donc s est défini positif.

b) On a

$$v^{-1}\circ u = s^{-1}\circ s^{-1}\circ u = s^{-1}\circ(s^{-1}\circ u\circ s^{-1})\circ s$$

L'endomorphisme $w = s^{-1}\circ u\circ s^{-1}$ est autoadjoint donc diagonalisable puis l'endomorphisme semblable $s^{-1}\circ w\circ s$ est aussi diagonalisable.

Exercice 23 : [énoncé]

Soit P la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs a,b,c dans une base orthonormée. On observe que $M = {}^tPP$. La matrice M est donc symétrique positive ce qui permet de conclure.

Exercice 24 : [énoncé]

Si $A\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors pour toute colonne X on a ${}^tXAX \geqslant 0$.

Pour X vecteur propre associé à la valeur propre λ, on a ${}^tXAX = \lambda{}^tXX$ donc $\lambda\geqslant 0$.

Si $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors toute colonne X est décomposable dans une base de vecteurs propres et on a ${}^tXAX = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$ en notant x_i la composante de X selon un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

Exercice 25 : [énoncé]

a) Pour $X = E_i$, ${}^tXAX = a_{i,i}\geqslant 0$.

b) Pour $X = E_i + \lambda E_j$, ${}^tXAX = a_{i,i} + 2\lambda a_{i,j} + \lambda^2 a_{j,j}$. Si $a_{i,i} = 0$ alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $2\lambda a_{i,j} + \lambda^2 a_{j,j} = 0$ donc $a_{i,j} = 0$.

Exercice 26 : [énoncé]

a) Puisque A est symétrique réelle, A est orthogonalement diagonalisable et donc il existe $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_i\geqslant 0$.
Posons alors $B = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})$. On vérifie $B^2 = A$ et ${}^tB = B$ (car ${}^tP = P^{-1}$) et les valeurs propres de B sont évidemment positives.

b) Pour $\lambda > 0$,

$$X^2 - \lambda = \left(X - \sqrt{\lambda}\right)\left(X + \sqrt{\lambda}\right)$$

avec $X-\sqrt{\lambda}$ et $X+\sqrt{\lambda}$ premier entre eux. Par le lemme de décomposition des noyaux

$$\ker(A-\lambda I_n) = \ker(B-\sqrt{\lambda}I_n)\oplus\ker(B+\sqrt{\lambda}I_n)$$

or $\ker(B+\sqrt{\lambda}I_n) = \{0\}$ car les valeurs propres de B sont positives et donc

$$\ker(A-\lambda I_n) = \ker(B-\sqrt{\lambda}I_n)$$

c) Il est immédiat que $\ker B\subset\ker B^2 = \ker A$.
Inversement, soit $X\in\ker A = \ker B^2 = \ker{}^tBB$. On a ${}^tBBX = 0$ donc ${}^tX{}^tBBX = 0$ i.e. $\|BX\|^2 = 0$. On en déduit $X\in\ker B$ et donc $\ker A = \ker B$

d) Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque A est diagonalisable, on peut écrire

$$X = \sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}A} X_\lambda \text{ avec } X_\lambda\in\ker(A-\lambda I_n)$$

Puisque $\ker(A-\lambda I_n) = \ker(B-\sqrt{\lambda}I_n)$, on a alors

$$BX = \sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}B} BX_\lambda = \sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}B}\sqrt{\lambda}X_\lambda$$

ce qui détermine B de façon unique.

Exercice 27 : [énoncé]

a) Puisque A est symétrique réelle, A est orthogonalement diagonalisable et donc il existe $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_i\geqslant 0$.
Posons alors $B = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})$. On vérifie $B^2 = A$ et ${}^tB = B$ (car ${}^tP = P^{-1}$) et les valeurs propres de B sont évidemment positives.

b) Soit $X \in \ker(B - \sqrt{\lambda} I_n)$, $BX = \sqrt{\lambda} X$ donc $AX = B^2X = \lambda X$ puis $X \in \ker(A - \lambda I_n)$.
Puisque A est diagonalisable,

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} \ker(A - \lambda I_n)$$

Puisque B est diagonalisable,

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}B} \ker(B - \mu I_n)$$

Or les valeurs propres de B sont positives et leurs carrés sont valeurs propres de A donc

$$\mathrm{Sp}B \subset \left\{\sqrt{\lambda}/\lambda \in \mathrm{Sp}A\right\}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} \ker(B - \sqrt{\lambda} I_n)$$

quitte à introduire quelques espaces nuls.
On en déduit

$$\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} \dim \ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} \dim \ker(A - \lambda I_n) \ (1)$$

Or l'inclusion $\ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) \subset \ker(A - \lambda I_n)$ donne

$$\dim \ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) \leqslant \dim \ker(A - \lambda I_n) \ (2)$$

L'égalité (1) et la majoration (2) donne alors

$$\dim \ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) = \dim \ker(A - \lambda I_n)$$

pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}A$.
Par inclusion et égalité des dimensions

$$\ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) = \ker(A - \lambda I_n)$$

c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque A est diagonalisable, on peut écrire

$$X = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} X_\lambda \text{ avec } X_\lambda \in \ker(A - \lambda I_n)$$

Puisque $\ker(A - \lambda I_n) = \ker(B - \sqrt{\lambda} I_n)$, on a alors

$$BX = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}B} BX_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}B} \sqrt{\lambda} X_\lambda$$

ce qui détermine B de façon unique.

Exercice 28 : [énoncé]
a) Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $S = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geqslant 0$.
Considérons alors un polynôme Π, construit par interpolation de Lagrange vérifiant

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \pi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$$

Posons ensuite $A = \Pi(S)$. A est un polynôme en S, A est symétrique réelle et

$$P^{-1}AP = P^{-1}\Pi(S)P = \Pi(D) = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$$

Les valeurs propres de A sont positives donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin, puisque

$$P^{-1}A^2P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D$$

on a $A^2 = S$.
b) Soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = S$. On a $BS = S^3 = SB$ donc B commute avec S et donc avec A qui est un polynôme en S. Puisque A et B sont diagonalisables et qu'elle commutent toutes deux, elles sont codiagonalisables. Ainsi, il existe une matrice de passage $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \text{ et } Q^{-1}BQ = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

Or $A^2 = S = B^2$ donc $\mu_i^2 = \lambda_i$ puis $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ car $\mu_i \geqslant 0$.
Finalement $A = B$

Exercice 29 : [énoncé]
Existence : Il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale positive telle que ${}^tUAU = D$. Soit Δ la matrice diagonale dont les coefficients sont les racines carrée des coefficients de D. Δ est diagonale positive et $\Delta^2 = D$.
Pour $B = U\Delta{}^tU$, on a $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B^2 = A$ donc B solution.
Unicité : Supposons B solution et introduisons un espace vectoriel euclidien E de dimension n et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ représentés par A et B dans une base orthonormée.
Avec des notations immédiates $E_\lambda(v) \subset E_{\lambda^2}(u)$, or $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}^+} E_\lambda(v)$ et $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}^+} E_{\lambda^2}(u)$ donc $\dim E_\lambda(v) = \dim E_{\lambda^2}(u)$ puis $E_\lambda(v) = E_{\lambda^2}(u)$. Ceci détermine entièrement v et permet de conclure à l'unicité de B.

Exercice 30 : [énoncé]
${}^tXAX = {}^t(MX)MX \geqslant 0$ donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geqslant 0$. Posons $M = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. On a $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $M^2 = A$ donc $A = {}^tMM$.

Exercice 31 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n = 1$, $S = (a)$ avec $a \geqslant 0$ donc $T = (\sqrt{a})$ convient.
Supposons la propriété établie au rang $n - 1 \geqslant 1$.
Soient $S = \begin{pmatrix} a & L \\ {}^tL & S' \end{pmatrix} \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $T = \begin{pmatrix} \alpha & \Lambda \\ 0 & T' \end{pmatrix} \in T_n^+(\mathbb{R})$. On observe
${}^tTT = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\Lambda \\ \alpha{}^t\Lambda & S'' \end{pmatrix}$ avec $S'' = {}^t\Lambda\Lambda + {}^tT'T'$.
Pour $X = E_1$, la relation ${}^tXSX \geqslant 0$ donne $a \geqslant 0$.
Si $a = 0$ alors, en exploitant ${}^tXSX \geqslant 0$ avec $X = E_1 + \lambda E_j$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient $L = 0$.
De plus il est immédiat qu'alors $S' \in \mathcal{S}_{n-1}^+(\mathbb{R})$ et en prenant $\alpha = 0$, $\Lambda = 0$ et $T' \in T_{n-1}^+(\mathbb{R})$ tel que $S' = {}^tT'T'$ on conclut.
Si $a > 0$ alors on pose $\alpha = \sqrt{a}$ et $\Lambda = \frac{1}{\alpha}L$ et il reste à déterminer T' tel que $S' = {}^t\Lambda\Lambda + {}^tT'T'$.
Posons $\Sigma = S' - {}^t\Lambda\Lambda$ et montrons $\Sigma \in \mathcal{S}_{n-1}^+(\mathbb{R})$ ce qui permettra de conclure via l'hypothèse de récurrence.
Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ X' \end{pmatrix}$, ${}^tXSX \geqslant 0$ donne $ax_1^2 + 2x_1LX' + {}^tX'S'X' \geqslant 0$ et pour $x_1 = -\frac{1}{a}LX'$ on obtient ${}^tX'S'X' - \frac{1}{a}(LX')^2 \geqslant 0$ ce qui donne ${}^tX'\Sigma X' \geqslant 0$ et permet de conclure.
Récurrence établie.

Exercice 32 : [énoncé]
a) C'est $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car ces espaces sont évidemment orthogonaux et supplémentaires.
b)
$${}^t\exp(xB)\exp(xB) = \exp({}^t(xB))\exp(xB) = \exp(-xB)\exp(xB)$$
Or $-xB$ et xB commutent donc
$${}^t\exp(xB)\exp(xB) = \exp(-xB + xB) = \exp(0) = I_n$$
c) La fonction dérivable $f : x \mapsto \mathrm{tr}(A\exp(xB))$ admet un maximum en 0 donc $f'(0) = 0$ ce qui donne $\mathrm{tr}(AB) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi A est une matrice symétrique. Par le théorème spectrale $A = {}^tPDP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Posons $V = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\varepsilon_i\lambda_i = |\lambda_i|$ et $U = PV{}^tP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
$$\mathrm{tr}(AU) = \mathrm{tr}(APV{}^tP) = \mathrm{tr}({}^tPAPV) = \mathrm{tr}(DV) = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|$$
et
$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$
La propriété $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}A$ entraîne $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i.
d) Supposons $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On peut écrire $A = {}^tPDP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AU) = \mathrm{tr}(DV)$ avec $V = (v_{i,j}) = {}^tPUP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
On a alors
$$\mathrm{tr}(DV) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathrm{tr}(A)$$
car $v_{i,i} \leqslant 1$.
e) L'application réelle $f : V \to \mathrm{tr}(MV)$ est continue sur le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, elle y admet donc un maximum en un certain $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a alors pour tout $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{tr}(MV) \leqslant \mathrm{tr}(MU)$$
Posons alors $A = MU$. Pour tout $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{tr}(AW) \leqslant \mathrm{tr}A$$
donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et ainsi $M = AU^{-1}$ avec $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 33 : [énoncé]
Puisque la matrice A est symétrique réelle positive, elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients positifs. On peut donc écrire
$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \lambda_k \geqslant 0$$
On a alors
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(PDP^{-1}B) = \mathrm{tr}(DC)$$
avec $C = P^{-1}BP$ qui est encore une matrice symétrique réelle positive.
On a alors
$$\mathrm{tr}(DC) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_{i,i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^n c_{i,i}\right) = \mathrm{tr}(D)\mathrm{tr}(C)$$
car les scalaires λ_i et les coefficients $c_{i,i}$ sont positifs.
Puisque deux matrices semblables ont même trace, on parvient à l'inégalité voulue.

Exercice 34 : [énoncé]
Puisque symétrique réelle positive, la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients positifs ce qui permet décrire
$$A = {}^tPDP$$

avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geqslant 0$.
On a alors
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(DPB^tP) = \operatorname{tr}(DB')$$
avec $B' = PB^tP$. On vérifie aisément que B' est symétrique positive car B l'est et alors ces coefficients diagonaux sont positifs puisque
$$b'_{ii} = {}^tE_iBE_i \geqslant 0$$
On a alors
$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b'_{ii} \geqslant 0$$

Exercice 35 : [énoncé]
Supposons $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$, les sous-matrices
$$\begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1/a_{i,i} & 1/a_{i,j} \\ 1/a_{j,i} & 1/a_{j,j} \end{pmatrix}$$
sont symétriques positives donc de déterminants positifs. Ainsi
$$a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}^2 \geqslant 0 \text{ et } \frac{a_{i,j}^2 - a_{i,i}a_{j,j}}{a_{i,i}a_{j,j}a_{i,j}^2} \geqslant 0$$
On en déduit
$$a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}^2 = 0$$
Ainsi toutes les matrices de taille 2 extraites de A sont non inversibles et donc $\operatorname{rg}A < 2$. Puisque les coefficients de A sont non nuls, on peut affirmer
$$\operatorname{rg}A = 1$$
Inversement, supposons $\operatorname{rg}A = 1$. Toutes les colonnes de A sont colinéaires entre elles ce qui perme d'écrire
$A = (\alpha_i\beta_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$
La relation
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geqslant 0$$
donne alors
$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\beta_j x_i x_j \geqslant 0$$
puis en posant $x_i = y_i/\alpha_i^2$,
$$\forall y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}, \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\alpha_i\beta_j} y_i y_j \geqslant 0$$
ce qui permet d'affirmer que la matrice symétrique B est positive.

Exercice 36 : [énoncé]
Notons que les coefficients diagonaux de A sont positifs car
$$a_{i,i} = {}^tE_iAE_i \geqslant 0$$
Il est alors immédiat que
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| = a_{i,i} \leqslant m$$
Pour $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, introduisons $X = \lambda E_i + E_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$${}^tXAX = \lambda^2 a_{i,i}^2 + 2\lambda a_{i,j} + a_{j,j}^2 \geqslant 0$$
Si $a_{i,i} = 0$ alors on a nécessairement $a_{i,j} = 0$ et donc $|a_{i,j}| \leqslant m$.
Si $a_{i,i} \neq 0$ alors puis que le trinôme du second degré est de signe constant, on a
$$\Delta = 4a_{i,j}^2 - 4a_{i,j}a_{j,j} \leqslant 0$$
puis
$$a_{i,j}^2 \leqslant a_{i,i}a_{j,j} \leqslant m^2$$
d'où
$|a_{i,j}| \leqslant m$

Exercice 37 : [énoncé]
La matrice A est évidemment symétrique.
Posons
$$T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$
On remarque
$$A = {}^tTT$$
On en déduit que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
$${}^tXAX = {}^t(TX)TX = \|TX\|^2 \geqslant 0$$
avec égalité si, et seulement si, $TX = 0$ ce qui donne $X = 0$.

Exercice 38 : [énoncé]
H est symétrique donc diagonalisable.
H est la matrice du produit scalaire

$$(P,Q)\mapsto\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc H est définie positive et donc à valeurs propres strictement positives.

Exercice 39 : [énoncé]
Pour $A\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on vérifie que $A_p=A+\frac{1}{p}I_n\to A$ avec $A_p\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 40 : [énoncé]
a) φ est clairement bilinéaire, symétrique car A l'est et définie positive car $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Notons $E_1,\dots,E_n$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$\varphi(E_i,E_j)=a_{i,j}$, $\varphi(E_i,E_i)=a_{i,i}$ et $\varphi(E_j,E_j)=a_{j,j}$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $a_{i,j}^2\leqslant a_{i,i}a_{j,j}$.
De plus, s'il y a égalité alors E_i et E_j sont colinéaires ce qui ne peut être le cas que si $E_i=E_j$.

Exercice 41 : [énoncé]
a) Si A est définie positive alors $\mathrm{Sp}A\subset\mathbb{R}^{+\star}$. De plus A est symétrique réelle donc diagonalisable et $\det A$ est le produit des valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Par suite $\det A>0$.
b) $A_p\in\mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ et pour tout $X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXA_pX={}^tX'AX'$ avec $X'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne obtenue en poursuivant la colonne X de coefficients nuls. On en déduit que si $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $A_p\in\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ puis $\det A_p>0$.
c) La propriété est immédiate au rang $n=1$.
Supposons la propriété acquise au rang $n\geqslant 1$.
Soit $A\in\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $p\in\{1,\dots,n+1\}$, $\det A_p>0$.
Par blocs, A est de la forme

$$A=\begin{pmatrix} A_n & C_n\\ {}^tC_n & \lambda\end{pmatrix}$$

Par application de l'hypothèse de récurrence, $A_n\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe donc $P_n\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tPAP=D_n=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ avec $\lambda_i>0$.

Considérons alors

$$P_{n+1}=\begin{pmatrix} P_n & X_n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$$

On a

$${}^tP_{n+1}AP_{n+1}=\begin{pmatrix} D_n & Y_n\\ {}^tY_n & \star\end{pmatrix}$$

avec $Y_n={}^tP_n(AX_n+C_n)$.
En choisissant $X_n=-A_n^{-1}C_n$, on obtient

$${}^tP_{n+1}AP_{n+1}=\begin{pmatrix} D_n & 0\\ 0 & \star\end{pmatrix}$$

avec $\lambda_{n+1}>0$ car $\det A>0$ entraîne $\lambda_1\dots\lambda_{n+1}>0$.
On peut alors affirmer que A est symétrique définie positive car A représente une telle forme bilinéaire symétrique dans une certaine base.
Récurrence établie.

Exercice 42 : [énoncé]
On peut écrire

$$I_n+AB=A\left(A^{-1}+B\right)$$

La matrice $A^{-1}+B$ est symétrique réelle et vérifie

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\,,{}^tX(A^{-1}+B)X={}^tXA^{-1}X+{}^tXBX>0$$

On en déduit que $A^{-1}+B$ est inversible car élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc I_n+AB est inversible par produit de matrices inversibles.

Exercice 43 : [énoncé]
a) ${}^tX{}^tAAX={}^t(AX)AX\geqslant 0$ et ${}^tX{}^tAAX=0\Rightarrow AX=0\Rightarrow X=0$.
b) Par le théorème spectral, il existe $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tP{}^tAAP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ avec $\lambda_i>0$.
La matrice $S={}^tP\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})P$ est alors solution.
c) Posons $O=AS^{-1}$. On a $A=OS$ et ${}^tOO={}^tS^{-1}{}^tAAS^{-1}=I_n$ donc $O\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $A=OS$.
d) Si $A=OS$ alors $S^2={}^tAA$.
Pour $\lambda\in\mathrm{Sp}({}^tAA)$, $\ker({}^tAA-\lambda I_n)=\ker(S^2-\lambda I_n)$. Or par le lemme de décomposition des noyaux, $\ker(S^2-\lambda I_n)=\ker(S-\sqrt{\lambda}I_n)\oplus\ker(S+\sqrt{\lambda}I_n)$ car $\lambda>0$. Or $\ker(S+\sqrt{\lambda}I_n)=\{0\}$ car $\mathrm{Sp}S\subset\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}({}^tAA)$, $\ker({}^tAA-\lambda I_n)=\ker(S-\lambda I_n)$ ce qui suffit à établir l'unicité de$S$ car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\underset{\lambda\in\mathrm{Sp}({}^tAA)}{\oplus}\ker({}^tAA-\lambda I_n)$.

Exercice 44 : [énoncé]
Si $A = {}^tPP$ alors il est facile d'établir que A est symétrique positive (voire définie positive si P est inversible). Inversement, si A est symétrique positive alors par le théorème spectral, on peut écrire $A = {}^tQDQ$ avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,
$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geqslant 0$ (voire $\lambda_i > 0$ si A est définie positive). Pour $P = \Delta Q$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ on dispose d'une matrice solution (inversible dans le cas où est définie positive.)

Exercice 45 : [énoncé]
a) $\mathrm{Vect}\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ notamment parce qu'une matrice symétrique peut s'écrire comme différence de deux matrices symétriques définies positives via diagonalisation.
b) ${}^tXAX = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i {}^tXA_iX$ avec ${}^tXA_iX \geqslant 0$ donc
$|{}^tXAX| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|\, {}^tXA_iX = {}^tXBX$.
c) Cas $B = I_n$.
La matrice A est diagonalisable et pour tout X, $|{}^tXAX| \leqslant {}^tXX$ assure que ses valeurs propres λ vérifient $|\lambda| \leqslant 1$ et donc $|\det A| \leqslant 1 = \det B$.
Cas général :
Si les λ_i sont tous nuls, c'est immédiat. Sinon, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On peut écrire $B = C^2$ avec $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Considérons ensuite $A' = C^{-1}AC^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $|{}^tXA'X| = \left|{}^t(C^{-1}X)A(C^{-1}X)\right| \leqslant {}^t(C^{-1}X)B(C^{-1}X) = {}^tXX$.
Par l'étude précédente, $|\det A'| \leqslant 1$ donc $|\det A| \leqslant (\det C)^2 = \det B$.

Exercice 46 : [énoncé]
a) On peut écrire $A = {}^tPDP$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$. La matrice $C = {}^tP\Delta P$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_n})$ convient.
b) ${}^tD = D$ et ${}^tXDX = {}^t(CX)B(CX) \geqslant 0$ donc $D \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. En notant $\mu_1, \dots, \mu_n \geqslant 0$ ses valeurs propres, l'inégalité voulue revient à
$\prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i)^{1/n} \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{1/n}$ qui s'obtient en appliquant l'inégalité de Jensen à la convexité de la fonction $x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.
c) $(\det C)^2 \det(A + B) = \det(CAC + CBC) = \det(I + D)$ avec $(\det C)^2 = 1/\det A$.

Exercice 47 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
On a alors

$$(A + B)(A^{-1} + B^{-1}) = I_n$$

et en développant

$$BA^{-1} + AB^{-1} + I_n = O_n$$

En multipliant à droite par la matrice A, on obtient

$$B + AB^{-1}A + A = O_n$$

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on obtient

$${}^tXBX + {}^t(AX)B(AX) + {}^tXAX = 0$$

avec

$${}^tXBX, {}^t(AX)B(AX), {}^tXAX > 0$$

ce qui est absurde.

Exercice 48 : [énoncé]
Le coefficient d'indice (i, j) de la comatrice de S est

$$(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

avec $\Delta_{i,j}$ le mineur d'indice (i, j) de la matrice S i.e. le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de S. Or le déterminant d'une matrice est aussi celui de sa transposée et puisque la matrice S est symétrique, le mineur d'indice (i, j) est égal à celui d'indice (j, i). On en déduit que la comatrice de S est symétrique.
Si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors

$$\mathrm{com}S = {}^t(\mathrm{com}S) = \det(S)S^{-1}$$

Puisque S est définie positive, son inverse S^{-1} l'est aussi et $\det S > 0$ donc $\mathrm{com}S$ est définie positive.
Si $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ alors pour tout $t > 0$,

$$S_t = S + tI_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

puis

$$\mathrm{com}(S_t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

et donc

$$\mathrm{com}(S) = \lim_{t \to 0^{\pm}} \mathrm{com}(S_t) \in \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$$

Exercice 49 : [énoncé]
a) La matrice ${}^tAA$ est définie positive.
b) Par le procédé de Schmidt, on peut orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de passage correspondante est alors triangulaire supérieure. Puisque la matrice d'un produit scalaire dans une base orthonormée est l'identité, la formule de changement de base donne ${}^tP{}^tAAP = I_n$ avec P triangulaire supérieure inversible.
c) Les matrices $Q = AP$ et $R = P^{-1}$ conviennent.
d) Si $A = QR = Q'R'$ alors $QQ'^{-1} = R'R^{-1}$ est une matrice orthogonale triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. En étudiant successivement ses colonnes, on obtient $QQ'^{-1} = R'R^{-1} = I_n$ puis l'unicité de la décomposition.

Exercice 50 : [énoncé]
Existence : Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ représentée par S dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.
φ est un produit scalaire car $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit $\mathcal{B}'$ l'orthonormalisée de Schmidt de la famille $\mathcal{B}$ pour le produit scalaire φ.
Notons T la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Celle-ci est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs.
Puisque la matrice de la forme bilinéaire symétrique φ dans la base orthonormée $\mathcal{B}'$ est I_n, la formule de changement de base donne $S = {}^tTI_nT = {}^tTT$.
Unicité : Supposons T, T' solutions. Puisque S est inversible, les matrices T et T' sont elles aussi inversibles.
On a ${}^tTT = {}^tT'T'$ donc $TT'^{-1} = {}^tT^{-1}{}^tT' = {}^t(T'T^{-1})$.
Or la matrice TT'^{-1} est triangulaire supérieure alors que ${}^t(T'T^{-1})$ est triangulaire inférieure. On en déduit que $TT'^{-1} = D$ avec D matrice diagonale.
De plus les coefficients diagonaux de T et T' étant strictement positifs, l'égalité $T = DT'$ entraîne que les coefficients diagonaux de D sont eux aussi positifs.
Enfin, l'égalité ${}^tTT = {}^tT'T'$ donne${}^tT'D^2T' = {}^tT'T'$ puis $D^2 = I_n$ d'où $D = I_n$ et finalement $T = T'$.

Exercice 51 : [énoncé]
Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. $\varphi(x,y) = {}^tXMY$ définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^n$.
En orthonormalisant pour le produit scalaire φ la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ par le procédé de Schmidt, on obtient une base $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage P de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure. Par changement de base $\varphi(x,y) = {}^tX'Y' = {}^tX{}^tPPY$ donne $M = {}^tPP$. D'une part $m_{i,i} = \sum_{j=1}^n p_{i,j}^2 \geqslant p_{i,i}^2$ et d'autre part $\det M = (\det P)^2 = \prod_{i=1}^n p_{i,i}^2$ permettent de conclure.

Exercice 52 : [énoncé]
a) Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ représentée par S dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.
φ est un produit scalaire car $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit $\mathcal{B}'$ l'orthonormalisée de Schmidt de la famille $\mathcal{B}$ pour le produit scalaire φ.
Notons T la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Celle-ci est triangulaire supérieure.
Puisque la matrice de la forme bilinéaire symétrique φ dans la base orthonormée $\mathcal{B}'$ est I_n, la formule de changement de base donne $S = {}^tTI_nT = {}^tTT$.
b) Notons $t_{i,j}$ les coefficients de la matrice T.
On a
$$s_{i,i} = \sum_{k=1}^i t_{k,i}^2 \geqslant t_{i,i}^2$$
donc
$$\prod_{i=1}^n s_{i,i} \geqslant \prod_{i=1}^n t_{i,i}^2 \geqslant (\det T)^2 = \det S$$
c) Si $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la propriété est immédiate.
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $S = {}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $s_{j,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2$ donc
$$(\det A)^2 = \det S \leqslant \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2$$
puis l'inégalité proposée.

Exercice 53 : [énoncé]
Sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, A est la matrice d'un produit scalaire. Pour ce produit scalaire, il existe une base orthonormée telle que la forme bilinéaire symétrique représentée par B soit une matrice diagonale D. La matrice du produit scalaire dans cette base orthonormée est l'identité et par la formule de changement de base, $A = {}^tPI_nP$ et $B = {}^tPDP$.

Exercice 54 : [énoncé]
Par diagonalisation d'une forme bilinéaire symétrique dans un espace euclidien dont le produit scalaire est défini par la matrice B, on peut écrire affirmer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B = {}^tPP$ et $A = {}^tPDP$. On a alors $\det(A - XB) = (\det P)^2\chi_D(X)$ scindé.

Exercice 55 : [énoncé]
a) Sur $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X,Y)={}^tXAY$ définit un produit scalaire et $\psi(X,Y)={}^tXBY$ définit une forme bilinéaire symétrique. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E pour φ diagonalisant la forme bilinéaire symétrique ψ. Pour la matrice de passage P de la base canonique de E (dans laquelle φ et ψ sont représentées par A et B) vers la base orthonormée précédente la relation de changement de base donne : $A={}^tPI_nP$ et $B={}^tP\Delta P$.
De plus, la forme bilinéaire symétrique ψ étant définie positive, les valeurs diagonales de Δ sont strictement positives.
b) Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs diagonales de Δ.
$\det A=(\det P)^2$, $\det B=\lambda_1\dots\lambda_n(\det P)^2$ et
$\det(A+B)=(1+\lambda_1)\dots(1+\lambda_n)(\det P)^2$
Les λ_i étant positifs :

$$1+\lambda_1\dots\lambda_n\leqslant(1+\lambda_1)\dots(1+\lambda_n)$$

donc

$$\det A+\det B\leqslant\det(A+B)$$

c) Toute matrice symétrique réelle positive peut-être diagonalisée via une matrice orthogonale en une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs. Cette dernière peut se voir comme limite d'une suite de matrices diagonales à coefficients diagonaux strictement positifs. Par suite $\mathcal{S}_n^{+\star}(\mathbb{R})$ est dense $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Par continuité du déterminant et densité, la relation précédente s'étend à $A,B\in\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Exercice 56 : [énoncé]
Par diagonalisation d'une forme bilinéaire symétrique dans un espace euclidien dont le produit scalaire est défini par la matrice A, on peut écrire affirmer qu'il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A={}^tPP$ et $B={}^tPDP$ avec D diagonale, $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.
En notant E_j les colonnes élémentaires, pour $X=P^{-1}E_j$, la condition ${}^tXAX\leqslant{}^tXBX$ donne $1\leqslant\lambda_j$.
On a alors $\det B=(\det P)^2\prod_{j=1}^n\lambda_j\geqslant(\det P)^2=\det A$.

Exercice 57 : [énoncé]
Par diagonalisation d'une forme bilinéaire symétrique dans un espace euclidien dont le produit scalaire est défini par la matrice A, on peut écrire affirmer qu'il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A={}^tPP$ et $B={}^tPDP$ avec D diagonale.
On a alors $AB={}^tPP^tPDP$ donc $({}^tP)^{-1}AB^tP=P^tPDP^tP$.
La matrice AB est donc semblable à P^tPDP^tP qui est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable.

Exercice 58 : [énoncé]
a) $\varphi:(X,Y)\mapsto{}^tXAY$ et $\psi:(X,Y)\mapsto{}^tXBY$ définissent respectivement un produit scalaire et une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ représentés par les matrices A et B dans la base canonique. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée pour le produit scalaire φ diagonalisant la forme bilinéaire symétrique ψ. En notant P la matrice de changement de base correspondante, les formules de passage donnent $A={}^tPI_nP={}^tPP$ car la nouvelle base est orthonormée pour φ et $B={}^tPDP$ avec D diagonale car celle-ci diagonalise ψ.
b) Cas :la matrice A est définie positive.
Par le résultat précédent, il suffit d'établir $(\det D)^{1-t}\leqslant\det(tI_n+(1-t)D)$ avec D matrice diagonale à coefficients diagonaux $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ positifs. On souhaite donc établir,

$$\left(\prod_{i=1}^n\lambda_i\right)^{1-t}\leqslant\prod_{i=1}^n(t+(1-t)\lambda_i)$$

Or pour tout $\lambda\geqslant0$, $\lambda^{1-t}\leqslant t+(1-t)\lambda$.
En effet pour $\lambda=0$, la propriété est immédiate et pour $\lambda>0$, celle-ci équivaut à $t\ln1+(1-t)\ln\lambda\leqslant\ln(t+(1-t)\lambda)$ qui découle de la concavité du logarithme.
On peut donc conclure en multipliant les comparaisons $0\leqslant\lambda_i^{1-t}\leqslant t+(1-t)\lambda_i$.
Cas : la matrice A est positive.
La matrice $A_p=A+\frac{1}{p}I_n$ est définie positive et donc
$(\det A_p)^t(\det B)^{1-t}\leqslant\det(tA_p+(1-t)B)$ pour tout $t\in\,]0,1[$.
En passant à la limite quand $p\to+\infty$, on obtient
$(\det A)^t(\det B)^{1-t}\leqslant\det(tA+(1-t)B)$ (avec ici $\det A=0$ si A n'est pas définie positive).

Exercice 59 : [énoncé]
a) Supposons $A+{}^tA\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour $X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, ${}^tXAX={}^tX^tAX$ donc ${}^tXAX=\frac{1}{2}\left({}^tX(A+{}^tA)X\right)>0$.
Inversement, si la condition $\forall X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},{}^tXAX>0$ est vérifiée alors on a aussi $\forall X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},{}^tX^tAX>0$ donc $\forall X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},{}^tX(A+{}^tA)X>0$. Puisque la matrice $A+{}^tA$ est évidemment symétrique, on obtient $A+{}^tA\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Commençons par observer que pour $A\in\mathcal{P}$, les valeurs propres complexes de A sont de partie réelle strictement positive. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et $Z\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ vérifiant $AZ=\lambda Z$. En écrivant $Z=X+iY$ avec X,Y colonnes réelles et $\lambda=\alpha+i\beta$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, la partie réelle de la relation $Z^\star AZ=\lambda Z^\star Z$ donne ${}^tXAX+{}^tYAY=\alpha\left\|Z\right\|^2$. On en déduit $\alpha>0$.
Pour $A\in\mathcal{P}$ et $S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on peut écrire $S={}^tPP$ avec $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a alors $({}^tP)^{-1}SA^tP=PA^tP$. En posant $B=PA^tP$, on peut affirmer que SA et B sont semblables et ont donc les mêmes valeurs propres.

Pour $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tXBX = {}^tYAY$ avec $Y = {}^tPX \neq 0$ donc ${}^tXBX > 0$. Par suite $B \in \mathcal{P}$ ce qui permet de conclure.

Exercice 60 : [énoncé]
La forme polaire de la forme quadratique q est donnée par

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left(f_1(x)f_2(y) + f_1(y)f_2(x)\right)$$

On a

$$x \in \ker \varphi \Leftrightarrow \forall y \in E, f_1(x)f_2(y) + f_1(y)f_2(x) = 0$$

Les formes linéaires f_1 et f_2 étant indépendantes, les hyperplans $\ker f_1$ et $\ker f_2$ sont distincts.
Pour$y \in \ker f_1 \setminus \ker f_2$, on obtient$f_1(x) = 0$. De même on montre $f_2(x) = 0$ et ainsi$\ker \varphi \subset \ker f_1 \cap \ker f_2$.
L'inclusion réciproque étant immédiate, il en résulte

$$\mathrm{rg}\varphi = \mathrm{codim} \ker \varphi = 2$$

Exercice 61 : [énoncé]
a) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de$F$.
$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E car intersection des noyaux des formes linéaires$f_i : x \mapsto \varphi(x, e_i)$.
Ces formes linéaires étant indépendantes (car φ non dégénérée)
donc$\dim F^\perp = n - p$.
b) On a $F \subset F^{\perp\perp}$ et égalité des dimensions donc égalité des espaces.
c) Supposons$F \oplus F^\perp = E$. La matrice de φ dans une base adaptée est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et$B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Or cette matrice est de rang n donc $\mathrm{rg} A = p$ et donc $\varphi_{|F}$ n'est pas dégénérée.
Supposons $\varphi_{|F}$ non dégénérée. Soit$x \in F \cap F^\perp$. On a pour tout$y \in F$, $\varphi(x, y) = 0$, or φ est non dégénérée donc $x = 0$ puis$F \oplus F^\perp = E$.

Exercice 62 : [énoncé]
Dans la base canonique, la matrice de Q est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$ de déterminant $\frac{(n-1)(-1)^{n-1}}{2^n}$.
Si $n = 1$, $\mathrm{rg} Q = 0$. Sinon $\mathrm{rg} Q = n$.

Exercice 63 : [énoncé]
$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2x_2x_3 = (x_1+x_2+x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_2+x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2-x_3)^2$.
De signature $(2, 1)$.

Exercice 64 : [énoncé]
$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i x_i x_j =$
$(x_1 + \cdots + x_n)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j + \sum_{i=2}^{n}(i-1)x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i x_i x_j$
donc $q(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)^2 + \sum_{i=2}^{n}(i-1)x_i^2 + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(i-1)x_ix_j =$
$\sum_{i=1}^{n}(x_i + \cdots + x_n)^2$.
Les formes linéaires $\varphi_i : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i + \cdots + x_n$ sont indépendantes, la signature de q est $(n, 0)$, c'est une forme quadratique définie positive.

Exercice 65 : [énoncé]
Soit φ la forme bilinéaire symétrique représentée par A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Si A est définie positive alors $\varphi_k = \varphi_{|\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)}$ l'est encore donc $\det \varphi_k = \Delta_k > 0$.
Inversement, supposons $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\Delta_k = \det((a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}) > 0$ et montrer par récurrence sur $1 \leqslant k \leqslant n$ que φ_k est définie positive.
Pour $k = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
La restriction de φ_{k+1} a $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ étant définie positive, la signature de φ_{k+1} est $(k, 1)$, $(k, 0)$ ou $(k+1, 0)$.
Dans une base orthogonale le déterminant de φ_{k+1} est alors respectivement < 0, 0 ou > 0.
Or $\Delta_{k+1} > 0$ donc φ_{k+1} est de signature $(k+1, 0)$ donc définie positive.

Exercice 66 : [énoncé]
φ est clairement bilinéaire et symétrique car $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 > 0$ pour tout $A \neq 0$. $\varphi_{|S_n(\mathbb{R})}$ est définie positive.
Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{tr}({}^tAA) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 < 0$ pour tout $A \neq 0$. $\varphi_{|A_n(\mathbb{R})}$ est définie négative.

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors
$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}({}^t(AB)) = \mathrm{tr}({}^tB\,{}^tA) = -\mathrm{tr}(BA) = -\varphi(A, B)$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et
$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
Dans une base adaptée, on observe que la signature de φ est $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.